

ปัญหาบางประการเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

Some Common Algebraic Misconceptions

นนทกร ประชุมกาเยาะมาต^{1*}, โรสนี จริยะมาการ², จิตติมา มานะการ³, ยุพาวรรณ ศรีสวัสดิ์⁴, สุรลักษณ์ มะ⁵
 Nonttakorn Prachumkayohmat^{1*}, Rosnee Chariyamakarn², Chittima Manakarn³, Yupawan Srisawat⁴,
 Sureeluk Ma⁵

(Received: 15 August,2023 ; Revised: 2 October,2023 ; Accepted 20 November,2023)

บทคัดย่อ

บทความนี้มีความมุ่งหมายเพื่อนำเสนอความสำคัญของการเรียนพีชคณิต ซึ่งพีชคณิตเป็นสาระที่สำคัญในวิชาคณิตศาสตร์และเป็นปัญหาที่พบบ่อยครั้งในกระบวนการเรียนรู้ที่ทำให้พบข้อผิดพลาดในความคิดเกี่ยวกับพีชคณิตของผู้เรียน และการเน้นความสำคัญของงานวิจัยที่ผ่านมาเกี่ยวกับพีชคณิต ในบทความนี้ได้จำแนกมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการเรียนรู้พีชคณิตออกเป็น 5 ประเภท ได้แก่ 1) ตัวแปร 2) นิพจน์พีชคณิต 3) สมการเชิงเส้น 4) พหุนาม นิพจน์ที่อยู่ในรูปเลขยกกำลัง และกรณฑ์ และ 5) ฟังก์ชันและกราฟ โดยอ้างอิงจากวรรณกรรมเพื่อนำเสนอข้อผิดพลาดทางความคิดในพีชคณิตที่พบบ่อยและเน้นให้ผู้สอนเห็นความสำคัญและตระหนักถึงข้อผิดพลาดเหล่านี้ นอกจากนี้ยังเสนอให้ขยายขอบเขตการศึกษาในงานนี้เพื่อค้นหากลยุทธ์ในการสอนที่มีประสิทธิภาพในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน

คำสำคัญ: มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน คณิตศาสตร์ พีชคณิต

Abstract

This article aims to examine the significance of learning algebra as a critical topic in mathematics education. Recognizing the importance of learning algebra is crucial for educators to address common misconceptions that hinder students' mathematical progress. Drawing on existing literature, it categorizes these misconceptions into five main categories: 1) variables;

^{1,2,3,4 และ 5} คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนราธิวาสราชนครินทร์ นราธิวาส 96000 ประเทศไทย

^{1,2,3,4 และ 5} Faculty of Science and Technology, Princess of Naradhiwas University, Narathiwat, 96000 Thailand

*Corresponding Author, E-mail: Nonttakorn.p@pnu.ac.th

2) algebraic expressions; 3) linear equations; 4) polynomials, exponents, and radical expressions; and 5) functions and graphs. Additionally, the article identifies the challenges of misconceptions that student encounter while learning algebra. It proposes expanding research in this field to develop effective teaching strategies that can address the common misconceptions in algebra that are often encountered in the classroom: that educators can enhance students' mathematical proficiency and promote an effective learning experience in algebra.

keywords: Misconceptions in Algebra, Mathematics, Algebra

บทนำ

พีชคณิตเป็นสาขาหนึ่งในคณิตศาสตร์ที่ศึกษาเกี่ยวกับโครงสร้าง ความสัมพันธ์ และจำนวน การเรียนพีชคณิตเบื้องต้นจะเริ่มสอนในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา โดยจะศึกษาเกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ การหาร เลขยกกำลัง และการถอดราก นอกจากนี้พีชคณิตยังรวมไปถึงการศึกษาสัญลักษณ์ และตัวแปร โดยพีชคณิตถูกพิจารณาว่าเป็นวิชาที่มีความสำคัญเปรียบเสมือนกระดูกสันหลังของวิชาคณิตศาสตร์ และได้รับการยอมรับว่าเป็นประตูสู่ความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ นั่นหมายความว่าพีชคณิตมีบทบาทสำคัญต่อการเรียนคณิตศาสตร์ อย่างไรก็ตามมีนักเรียนจำนวนมากที่ยังไม่เข้าใจเกี่ยวกับแนวคิดทางพีชคณิต นักเรียนยังไม่ได้รับความรู้หรือทักษะที่จำเป็นในเนื้อหา (Cai, 2004; Chaudhary, 2022) ในอดีตกาลพีชคณิตเป็นวิชาที่ถูกกำหนดไว้ให้นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายเรียนเท่านั้น เนื่องจากมีความเชื่อกันว่าการที่จะเรียนพีชคณิตได้นั้นผู้เรียนจำเป็นต้องมีพื้นฐานทางเลขคณิตเป็นอย่างดีเสียก่อน จึงทำให้หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับชั้นประถมศึกษาในอดีตมุ่งเน้นไปที่การเรียนเลขคณิตเป็นส่วนใหญ่และไม่ได้กำหนดให้มีการเรียนพีชคณิตกับนักเรียนระดับนี้ (Chazan & Yerushalmy, 2003) ข้อความที่มีการยอมรับกันอย่างแพร่หลายจากทั่วโลกที่มาจากการนำเสนอของสภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NTCM, 2000) ที่ได้กล่าวว่าให้มีการเรียน “พีชคณิตสำหรับทุกคน (Algebra for Everyone)” ความสามารถทางพีชคณิตไม่ว่าจะเป็นทั้งความสามารถในการใช้ตัวแปรและสูตรทางคณิตศาสตร์อย่างแม่นยำเป็นสิ่งสำคัญในการดำเนินชีวิตทั้งในการทำงานและการเตรียมตัวสำหรับการศึกษาต่อในระดับที่สูงขึ้น นักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาควรมีประสบการณ์ที่เตรียมพร้อมสำหรับการเรียนพีชคณิตที่ซับซ้อนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย จึงได้ข้อสรุปที่ยอมรับในปัจจุบันคือ การเตรียมความพร้อมสำหรับการเรียนพีชคณิตที่เป็นทางการควรเริ่มตั้งแต่ระดับชั้นประถมศึกษา (Cai & Knuth, 2005) และนอกจากนี้ Cathcart, Pothier, Vance & Bezuk. (2003) ได้เสนอแนะว่าหลักสูตรระดับชั้นประถมศึกษาควรมีลักษณะที่เป็นรูปธรรมเพื่อเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้พีชคณิตที่เป็นนามธรรมในระดับที่สูงขึ้น

เมื่อกล่าวถึงพีชคณิต คนส่วนใหญ่จะเข้าใจว่าพีชคณิตเป็นวิชาที่ว่าด้วยการแก้สมการที่ซับซ้อน หรือ การดำเนินการกับนิพจน์และตัวแปร ซึ่งสิ่งเหล่านี้เป็นเพียงบางส่วนของพีชคณิตเท่านั้น (NCTM, 2000) พีชคณิต ในมุมมองของนักคณิตศาสตร์ศึกษา เช่น ยูซิสกิน (Usiskin, 1999) กล่าวว่าพีชคณิตคือภาษาของวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งเกี่ยวข้องกับเรื่องตัวแปร นิพจน์ และโครงสร้างของการใช้สัญลักษณ์ โดยเขายังกล่าวอีกว่าการจะให้คำนิยามของพีชคณิตนั้นไม่ใช่เรื่องง่าย บางทีคนเราอาจมองว่าพีชคณิตเป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติต่างๆ ของจำนวนจริง และนอกจากนี้พวกเขามองว่าพีชคณิตคือวิชาที่ว่าด้วยเรื่องฟังก์ชัน ความสัมพันธ์ และการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับการหาแบบรูปของสิ่งต่างๆ การนำเสนอความคิดในรูปของสมการ ตาราง กราฟ และการแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสถานการณ์ (Christmas & Fey, 1999; Greenes & Findell, 1999; Johnston, Willis & Hughes, 1995; Lew, 2004)

มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งจำเป็นมากต่อการเรียนรู้ของนักเรียน ผู้เรียนที่มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ที่ถูกต้องจะสามารถเรียนรู้และนำไปใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ดี สิ่งเหล่านี้จะเป็นพื้นฐานในการ เชื่อมโยงมโนทัศน์หรือแนวความคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้น จึงเป็นสิ่งจำเป็นที่นักเรียนทุกคนต้องมี และครูผู้สอนต้องหมั่นพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ให้นักเรียนทุกคนสามารถบรรลุจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ กำหนดไว้ได้ แต่ในสถานการณ์จริงสำหรับชั้นเรียนคณิตศาสตร์นั้นยังมีนักเรียนบางคนที่ไม่สามารถบรรลุเป้าหมาย ตามที่กำหนดไว้ อาจเนื่องมาจากความแตกต่างทางด้านสติปัญญา ความสนใจ ความถนัด และรวมไปถึงความ บกพร่องในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนของครู ปัญหาต่างๆ เหล่านี้จะนำไปสู่ปัญหาที่สำคัญของนักเรียน นั่นก็คือการมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ และสำหรับการเรียนเนื้อหาเกี่ยวกับพีชคณิต ซึ่งเป็นสาระ หนึ่ง ในคณิตศาสตร์ที่มีความเป็นนามธรรมสูง จะพบว่านักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตใน หลากหลายรูปแบบ แต่อย่างไรก็ดีการทราบถึงข้อมูลในเรื่องการมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียน จะเป็น ข้อมูลย้อนกลับในการปรับปรุงการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน เพื่อปรับปรุงและแก้ไขมโนทัศน์ที่มีอยู่อย่าง ไม่ ถูกต้อง ตลอดจนการแก้ปัญหาเพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน ข้อมูลที่ได้จาก การศึกษา รวบรวม และวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนจะมีส่วนสำคัญมากในการพัฒนามโนทัศน์ ทางคณิตศาสตร์และมโนทัศน์ทางพีชคณิตที่ถูกต้องของนักเรียนทุกคน

การเรียนรู้สาระพีชคณิตในวิชาคณิตศาสตร์ หากเราสามารถพัฒนากรอบแนวคิดที่ช่วยในการเสริมสร้าง มโนทัศน์เกี่ยวกับการคิดของผู้เรียน จะมีส่วนสำคัญในการสร้างข้อมูลพื้นฐานสำหรับการกำหนดเป้าหมายหรือ มาตรฐานการเรียนรู้และการออกแบบหลักสูตรการเรียนรู้ เพื่อให้เหมาะสมกับความสามารถของผู้เรียนในแต่ละ ช่วงวัย (Cobb, Wood, Yackel, Nicholls, Wheatley, Trigatti & Perlwitz, 1991) การรวบรวมงานวิจัยที่ ทำการศึกษาเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต จะช่วยให้นักวิจัยทางคณิตศาสตร์ศึกษาและครูผู้สอน มองเห็นถึงความผิดพลาดทางพีชคณิตที่เกิดขึ้นระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นเรียน ทำให้ผู้เกี่ยวข้อง ตระหนักถึงปัญหา มองหากลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้น เพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบกิจกรรมการ

เรียนรู้ และอาจพิจารณาการนำพีชคณิตไปใช้ใหม่ เนื่องจากพีชคณิตไม่เพียงแต่ให้ความสำคัญแค่ด้านการพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และเจตคติที่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์เท่านั้น แต่ยังเป็นหัวใจสำคัญในการเสริมสร้างทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และสมรรถนะทางคณิตศาสตร์อีกด้วย

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต สำหรับบทความนี้ผู้วิจัยได้จำแนกมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการเรียนรู้พีชคณิตออกเป็น 5 ประเภท ได้แก่ 1) ตัวแปร 2) นิพจน์พีชคณิต 3) สมการเชิงเส้น 4) พหุนาม นิพจน์ที่อยู่ในรูปเลขยกกำลัง และกรณฑ์ และ 5) ฟังก์ชันและกราฟ โดยจะนำเสนอมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตในแต่ละประเภทตามลำดับ

1) มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตเกี่ยวกับตัวแปร (Variables)

ในการศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตเกี่ยวกับตัวแปรของผู้เรียน จากงานวิจัยที่กล่าวถึงโดยสแตซี่ และแม็กเกรเกอร์ (Stacey & MacGregor, 1997) พบว่า ส่วนใหญ่เกิดจากการขาดความเข้าใจเกี่ยวกับโครงสร้างพื้นฐานของพีชคณิต โดยผู้เรียนมักกำหนดตัวแปรและใช้ตัวอักษรย่อแทนคำอธิบายที่ไม่ถูกต้อง บางครั้งผู้เรียนใช้สัญลักษณ์หรืออ้างอิงตัวอักษรเพื่อแทนวัตถุในชีวิตจริง จากการศึกษาของเดมบี้ (Demby, 1997) ผู้เรียนตีความนิพจน์พีชคณิต “ $8a$ ” ว่าเป็น “8 ลูกแอปเปิ้ล” ถ้าต้องการให้ผู้เรียนมีการเปลี่ยนแปลงนิพจน์ “ $2a + 3a$ ” เป็น “2 ลูก แอปเปิ้ลบวกกับ 3 ลูกแอปเปิ้ล” อาจเป็นการกระทำที่ไม่เพียงพอต่อการยกระดับกระบวนการแก้ปัญหาของผู้เรียน เมื่อต้องเผชิญกับสถานการณ์ปัญหาที่มีความซับซ้อนยิ่งขึ้น หรือขาดการเชื่อมโยงระหว่างรูปธรรมไปเป็นนามธรรม เช่น แทนจำนวนลูกแอปเปิ้ลด้วย a งานวิจัยทั้งสองเรื่องนี้ได้เน้นถึงตัวอย่างที่เกี่ยวข้อง “เมื่อแอปเปิ้ลราคา a สตางค์ และกล้วยราคา b สตางค์” เพื่อแสดงให้เห็นว่าผู้เรียนอาจให้ความหมายที่ไม่ถูกต้องเกี่ยวกับตัวแปร ถ้าเราต้องการหาราคาของแอปเปิ้ล 3 ลูก เราจะนำราคาของแอปเปิ้ล “ a ” มาคูณด้วย 3 จึงจะได้ราคาของแอปเปิ้ล 3 ลูก คือ $3a$ สตางค์ ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนที่อาจเกิดขึ้นคือผู้เรียนอาจเข้าใจว่า “ a ” คือ “แอปเปิ้ล” แทนที่จะเป็นราคาของแอปเปิ้ล หรือผู้เรียนอาจจะเข้าใจว่า $3a$ คือ “3 แอปเปิ้ล” แทนที่จะเป็นราคาของแอปเปิ้ล 3 ลูก ความเข้าใจที่ถูกต้องคือผู้เรียนมองเห็น “ a ” และ “ b ” ในนิพจน์พีชคณิตว่าเป็นตัวแทนของราคาของแอปเปิ้ลและกล้วย และต้องรู้จักการใช้สัญลักษณ์การคูณ (‘’) ในการคำนวณราคาของผลไม้ต่างๆ โดยเมื่อเราต้องการหาราคาของแอปเปิ้ล 3 ลูก เราจะนำ “ a ” คูณด้วย 3 หรือเขียนเป็น $3a$ จึงจะได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องคือราคาของแอปเปิ้ล 3 ลูก มีค่าเป็น $3a$ สตางค์ ดังนั้น การเข้าใจความหมายและบทบาทของตัวแปรในพีชคณิตจึงเป็นเรื่องที่สำคัญมาก ผู้เรียนต้องใส่ใจเรื่องการใช้สัญลักษณ์และเครื่องหมายที่ถูกต้อง เพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ถูกต้องในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2) มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตเกี่ยวกับนิพจน์พีชคณิต (Algebraic Expression)

นิพจน์พีชคณิตคือการเขียนให้อยู่ในรูปของค่าคงตัวกับตัวแปร เช่น -3 , $\sqrt{2}$, $x+1$, $2x-y$, $\sqrt{x^2+y^2}$, $x^3-y^3+2xy+3xyz$, $\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{1}{x^2+y^2-1}$, $\frac{3x^2y+4z}{y^3-x}$, ... ผู้เรียนจะต้องดำเนินการกับพจน์ในลักษณะต่อไปนี ซึ่งเกิดจากการบวก การลบ การคูณ การหาร การยกกำลัง การหารากของจำนวนหรือตัวแปร x , y , z , ... เราเรียกนิพจน์ที่เกี่ยวข้องกับพีชคณิตว่า “นิพจน์พีชคณิต” ตัวแปรเป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนค่าที่เปลี่ยนไปได้ (Liebenberg, Lincheveski, Oliver, & Sasman, 1998) เช่น เวลา น้ำหนัก อุณหภูมิ ระยะทาง พื้นที่ ปริมาตร หรือจำนวนนักเรียน เป็นต้น การหาค่าของนิพจน์พีชคณิตสามารถทำได้โดยแทนตัวแปรด้วยจำนวนที่ต้องการแล้วคำนวณหาค่านั้นออกมา เช่น ถ้าเราใส่ค่าตัวแปร x เป็น 0 หรือ y เป็น -1 ลงในนิพจน์ $x^2 - y^2 + 2xy - 1$ จะได้ $(0)^2 - (-1)^2 + 2(0)(-1) - 1 = -2$

ในการศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตเกี่ยวกับนิพจน์พีชคณิต Cambell (2009) ได้สังเกตเห็นว่าผู้เรียนมีความเข้าใจที่ไม่ถูกต้องเกี่ยวกับการตรวจรูปนิพจน์ตรรกยะ $\frac{x+y}{y} = x+1$, $\frac{x+y}{y} = x$ ความผิดพลาดที่พบบ่อยครั้งในกระบวนการตรวจรูปนิพจน์พีชคณิตที่ซับซ้อนที่เป็นตัวอย่างของการทำให้อยู่ในรูปสำเร็จเกินเงื่อนไข เช่น ผู้เรียนใช้กฎที่ไม่ถูกต้อง โดยมองว่านิพจน์ $\frac{a+x}{b+x}$ มีค่าเท่ากับ $\frac{a}{b}$ เช่นเดียวกับ $\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของมุลังเยร์ (Mulungye, 2016) ที่พบว่า 37% ของผู้เรียนสามารถดำเนินการกับนิพจน์พีชคณิตให้อยู่ในรูปที่เรียบง่ายได้ แต่ขั้นตอนวิธีไม่ถูกต้อง กล่าวคือผู้เรียนสามารถประยุกต์ใช้กฎที่ถูกต้อง แต่ใช้กระบวนการแยกพจน์ในนิพจน์เกี่ยวกับพีชคณิตไม่ถูกต้อง ซึ่งทำให้การตัดออกเป็นไปอย่างไม่ถูกต้อง เช่นเดียวกับการศึกษาของอีโกดาวัตต์ (Egodawatte, 2011) พบว่า ในการพยายามแก้ปัญหามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน $\frac{xa+xb}{x+xd}$ ผู้เรียนใช้วิธีการแยกพจน์เพื่อตัด x ซึ่งได้ $\frac{xa}{x} + \frac{xb}{xd}$ นอกจากนี้อสเตนและซาคาเรีย (Osten & Zakaria, 2018) ได้กล่าวถึงปัญหาในการดำเนินการกับนิพจน์พีชคณิต $\frac{xa+xb}{x+xd}$ จะเห็นว่ามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของผู้เรียนที่พบบ่อยมีอยู่สองแบบคือ $\frac{a+b}{d}$ หรือ $a + \frac{b}{d}$ ซึ่งเกิดจากกระบวนการที่ผู้เรียนสามารถแยกตัวประกอบ x ออกจากตัวเศษและตัวส่วนของนิพจน์พีชคณิตได้ คือ $\frac{x(a+b)}{x(1+d)}$ แต่ลืมทำการตัดตัวเศษและตัวส่วน หรือผู้เรียนเขียนคำตอบให้อยู่ในรูป $x(a+b)$, $x(1+d)$ โดยไม่ได้ดำเนินการให้อยู่ในรูปสำเร็จ จึงทำให้ได้คำตอบที่อยู่ในรูปสำเร็จแต่ไม่สมบูรณ์

การเรียนรู้โครงสร้างพีชคณิตเป็นเรื่องที่สำคัญอย่างยิ่งในการพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเนื่องจากเป็นพื้นฐานที่จำเป็นในการเข้าใจและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนในระดับที่สูงขึ้น ผู้เรียนบางคนอาจสับสนในขั้นตอนที่คล้ายกันในโครงสร้างของพีชคณิต และความคล้ายคลึงกันนี้อาจทำให้เกิดความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในการแก้ปัญหา จากการศึกษางานวิจัยของอีโกดาวัตต์ (Egodawatte, 2011; Osten & Zakaria, 2018) พบว่า นักเรียนมักคูณนิพจน์พีชคณิตไม่ถูกต้อง เมื่อมีกรณี $\left[x\left(\frac{a}{b}\right)\right]$ ผู้เรียนคิดว่าต้องนำตัว

แปร x มาคูณกับทั้งตัวเศษและตัวส่วนของนิพจน์พีชคณิต และเขียนคำตอบเป็น $\left(\frac{ax}{bx}\right)$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้อง เพื่อเพิ่มเติมความเข้าใจเกี่ยวกับการคูณนิพจน์พีชคณิต นักเรียนควรเข้าใจในขั้นตอนของการคูณที่ถูกต้อง

เมื่อมี การคูณระหว่างตัวแปร x และนิพจน์ $\left(\frac{a}{b}\right)$ ซึ่งจะได้คำตอบเป็น $x\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{ax}{b}$ นอกจากนี้ผู้เรียนมักจะ

เข้าใจผิดและมองว่า $\left[x\left(\frac{a}{b}\right)\right]$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $\sqrt[b]{x^a}$ หรือ x^{a-b}

3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตเกี่ยวกับสมการเชิงเส้น (Linear Equations)

สมการเชิงเส้น เป็นสมการพหุนามที่ตัวแปรในสมการมีเลขชี้กำลังเป็น 1 และไม่มีผลคูณของตัวแปร เช่น $3x - 5 = 1$ หรือ $2t + 7 = 2 + t$ (ตัวแปรเดียว), $4x - 5y = 1 - 2y$ (สองตัวแปร), $x + y + z = 5$ (สามตัวแปร) เป็นต้น มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตเกี่ยวกับสมการเชิงเส้น จากการศึกษาของมุลังเยร์, โอคอนเนอร์, และเอนดีทิว (Mulungye, O'Connor, & Ndethiu, 2016) พบว่า นักเรียนไม่มีความเข้าใจเกี่ยวกับการดำเนินการกับจำนวนเต็มในการแก้สมการ การใช้สมบัติสมมาตร สมบัติการแจกแจง สมบัติการถ่ายทอด และการคำนวณ เช่นเดียวกับไททัส (Titus, 2010) พบว่า สำหรับการจัดนิพจน์ให้อยู่ในรูปสำเร็จ ผู้เรียนขาดความเข้าใจในการดำเนินการพื้นฐานและการใช้ลำดับของการดำเนินการเกี่ยวกับจำนวนลบหรือจำนวนที่มีเครื่องหมายลบติดอยู่ในนิพจน์ นอกจากนี้โทกาและอัซการ์ (Toka & Aşkar, 2002) พบว่า มีความเข้าใจผิดเกี่ยวกับการใช้สมบัติการแจกแจง นักเรียนบางคนเขียนสมการ $5 - 3(2 - x) = -7$ ให้อยู่ในรูป $5 - 6 - 3x = -7$ นอกจากนี้ นักเรียนเขียนสมการเดียวกันในรูปแบบใหม่เป็น $2(2 - x) = -7$ โดยใช้ลำดับการดำเนินการไม่ถูกต้องเช่นเดียวกัน เห็นได้ว่านักเรียนมักมีข้อผิดพลาดในแง่แนวคิดเกี่ยวกับการแจกแจงเครื่องหมายลบ เช่น $2 - (3x - 4y) = 2 - 3x - 4y$ ยังมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอื่นเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นที่นักเรียนมักเข้าใจไม่ถูกต้อง โดยลี (Li, 2006) ได้ทำการทดสอบความสามารถในการแก้สมการเชิงเส้นอย่างง่ายของนักเรียน เช่น เมื่อให้นักเรียนแก้สมการ $19 = 3 + 4y$ เขาพบว่ามีปัญหาที่เกิดขึ้นกับนักเรียนหลายประการ

เริ่มต้นที่โครงสร้างของสมการที่แตกต่างจากสมการที่นักเรียนคุ้นเคย ปัญหาที่สองคือการใช้ตัวแปร “ y ” แทนค่าที่ไม่ทราบ ในขณะที่นักเรียนบางคนคิดว่ามีเฉพาะตัวแปร “ x ” เท่านั้นที่สามารถแทนค่าในสมการที่ไม่ทราบค่าได้ และยังมีนักเรียนบางคนที่ยังไม่เข้าใจว่า “ $4y$ ” คืออะไร ในการศึกษาครั้งนี้เขายังพบว่านักเรียนเข้าใจไม่ถูกต้องเมื่อเห็นนิพจน์ $3 + 4y$ โดยเข้าใจว่ามีความหมายเช่นเดียวกับ $3 + 4 + y$, $(3 + 4)y$, $3 \cdot 4 + y$ เป็นต้น จากการศึกษาดังกล่าวทำให้ทราบว่านักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการแก้สมการเชิงเส้น ทั้งในขั้นตอนการดำเนินการกับจำนวนเต็ม การใช้สมบัติต่างๆ และการจัดนิพจน์ให้อยู่ในรูปสำเร็จ เหตุผลหลักอาจเกิดจากการขาดความเข้าใจพื้นฐานในขั้นตอนการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ยังมีมโนทัศน์ที่ไม่ถูกต้องเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นที่ทำให้นักเรียนคลาดเคลื่อนในกระบวนการแก้ปัญหาในระดับที่ยากขึ้น หากนักเรียนได้รับความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับการแก้สมการเชิงเส้น จะช่วยให้พวกเขาสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพและถูกต้องได้ในระดับชั้นเรียนที่สูงขึ้น

4) มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตเกี่ยวกับพหุนาม นิพจน์ที่อยู่ในรูปเลขยกกำลัง และกรณฑ์ (Polynomials, Exponents and Radical Expressions)

จากการศึกษาลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตเกี่ยวกับพหุนาม นิพจน์ที่อยู่ในรูปเลขยกกำลัง จากการศึกษาของมุลังเยร์ (Mulungye, 2016) พบว่า นักเรียนมักมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการประยุกต์ใช้สมบัติการแจกแจงกับเลขยกกำลังที่ไม่ถูกต้อง เช่น พวกเขาเขียนนิพจน์ $(a + b)^5$ ในรูปแบบ $a^5 + b^5$ หรือเขียนนิพจน์ $3(a + b)^2$ ให้อยู่ในรูป $3a^2 + 3b^2$ และจากการศึกษาของอีโกดาวัตต์ (Egodawatte, 2011) พบว่า นักเรียนมักมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในรูปแบบเดียวกัน เช่น นักเรียนกระจาย $(A + B)^2$ ให้อยู่ในรูปแบบ $A^2 + B^2$ แล้วดำเนินการเพิ่มเติมเพื่อเพิ่มคำตอบด้วย A^2B^2 , $(AB)^2$ เป็นต้น สิ่งเหล่านี้เป็นผลมาจากการนำความรู้ที่มีอยู่เดิมมาใช้อย่างไม่ถูกต้อง นอกจากนี้ในการศึกษาอื่นๆ ที่สอดคล้องกัน นักเรียนกระจาย $(x + y)^2$ ให้อยู่ในรูป $x^2 + y^2$ และยังเข้าใจว่า $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ด้านมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตเกี่ยวกับนิพจน์ที่อยู่ในรูปกรณฑ์ ยังมีประเด็นที่นักเรียนเข้าใจคลาดเคลื่อน เช่น “รากที่สองของ 16 กับ $\sqrt{16}$ ” ยังเป็นกรณีที่นักเรียนมีความคลาดเคลื่อนอยู่บ่อยครั้งเช่นเดียวกัน (Barcellos, 2005 และ Mulungye et al., 2016) และจากการศึกษาของโอโฮเซ (Ojose, 2015) พบว่า นักเรียนบางคนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการบวกพหุนาม นิพจน์ที่อยู่ในรูปเลขยกกำลัง โดยนักเรียนมักคิดว่าพวกเขาสามารถบวกกำลังของนิพจน์ที่มีฐานเหมือนกันได้ ดังนั้นพวกเขามักจะทำการรวมกำลังของนิพจน์ดังกล่าวเข้าด้วยกันโดยใช้การคูณเลขชี้กำลัง เช่น การดำเนินการกับนิพจน์ $y^2 + y^4$ ให้อยู่ในรูป y^8 และจากการศึกษาในกรณีของบูธ, บาร์เบียร์, โอเยอร์ และบลากิเยฟ (Booth, Barbieri, Eyer & Blagoev, 2014) กล่าวว่า นักเรียนบางคนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการรวมพจน์ที่แตกต่างกัน โดยนักเรียนมองว่าเป็นหนึ่งตัวแปรเท่านั้น เช่น ถามนักเรียนว่า $9z + 1$ มีค่าเท่าไร นักเรียนเข้าใจคลาดเคลื่อนว่าสามารถรวมกันได้จึงตอบ $10z$ หรือนักเรียนนำพหุนาม

$6x^2 + 4x$ มารวมกันจึงตอบเป็น $10x^3$ เป็นความเข้าใจที่ไม่ถูกต้อง นอกจากนี้เขายังพบว่านักเรียนสามารถแยกวงเล็บของกำลังสองสมบูรณ์ $(y + 4)^2$ ให้อยู่ในรูป $(y + 4)(y + 4)$ โดยนักเรียนตอบ $y^2 + 16$ เป็นคำตอบสุดท้าย แต่นักเรียนไม่สามารถแสดงขั้นตอนการคูณของพจน์ภายในได้

5) มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตเกี่ยวกับฟังก์ชันและกราฟ (Functions and Graphs)

ฟังก์ชันเป็นหัวข้อที่มีความสำคัญในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้และเน้นให้นักเรียนได้ศึกษาตั้งแต่ระดับชั้นประถมศึกษาไปจนถึงระดับมหาวิทยาลัย ในการศึกษาของคาซินซิส, คูซุก, และอิสเลเยน (Casnsiz, Kucuk, & Isleyen, 2011) ผู้วิจัยพบว่านักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับแนวคิดของฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชัน นักเรียนบางคนไม่สามารถรับรู้ได้ว่ากราฟที่กำหนดให้ความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชันหรือไม่ และนักเรียนบางคนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับความต่อเนื่อง นอกจากนี้เขายังสังเกตเห็นว่านักเรียนบางคนไม่สามารถแยกแยะระหว่างตัวแปรต้นและตัวแปรตามในฟังก์ชันหรือกราฟได้อย่างถูกต้อง

จากการศึกษางานวิจัยของโอจาล (Öçal, 2017) เขาให้นักเรียนทำกิจกรรมเกี่ยวกับฟังก์ชันโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับนิพจน์พีชคณิต เลขยกกำลัง พหุนาม กรณธ์ และสมการ โดยกิจกรรมนี้นักเรียนจะสามารถสร้างและใช้ฟังก์ชันของตนเอง และช่วยให้นักเรียนเข้าใจฟังก์ชันในรูปแบบต่างๆ ได้มากขึ้น นอกจากนี้นักเรียนยังสามารถนำเสนอฟังก์ชันต่างๆ ในรูปแบบของกราฟเพื่อให้เห็นภาพการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันในเงื่อนไขที่แตกต่างกันได้อย่างชัดเจน โดยการเชื่อมโยงความรู้ทางทฤษฎีและการนำเสนอผ่านกราฟจะช่วยสร้างความเข้าใจที่ถูกต้องในการเรียนรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันอย่างมีประสิทธิภาพ งานวิจัยนี้สามารถขยายผลการศึกษาไปสู่การสำรวจการมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการหาค่าเส้นกำกับของฟังก์ชันพื้นฐานได้แก่ $\frac{1}{x}$, $\ln x$, และ e^x และการมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

จากการศึกษางานวิจัยของอสเตนและซาคาเรีย (Osten & Zakaria, 2018) เขาได้ให้นักเรียนหาค่าของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 1$, $f(0)$ และให้แก้สมการของฟังก์ชันดังกล่าว เขาพบข้อผิดพลาดหลายประการเกี่ยวกับการหาค่าของฟังก์ชัน โดยพบว่านักเรียนสามารถแทนค่า 0 ลงในฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 1$ ได้ แต่นักเรียนทำแค่เพียงการแทนค่า 0 ลงไปในฟังก์ชันดังกล่าว แต่นักเรียนไม่ได้แสดงคำตอบสุดท้ายให้ถูกต้องสมบูรณ์ได้ เช่น นักเรียนเขียนคำตอบ $0^2 - 1$, $0 - 1$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้องแต่ไม่สมบูรณ์ และในการแก้สมการ $x^2 - 1 = 0$ นักเรียนเขียนคำตอบสุดท้ายเป็น $(x - 1)(x + 1) = 0$ และ $x = \pm\sqrt{1}$ นอกจากนี้เขายังพบว่านักเรียนแก้สมการโดยเขียนให้อยู่ในรูป $f(x^2 - 1) = 0$ แล้วเขียนคำตอบสุดท้ายเป็น $f = \frac{0}{x^2 - 1}$ ถือว่านักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการแก้สมการดังกล่าว

บทสรุป

จากการศึกษาดังกล่าวจะเห็นได้ว่ามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต เป็นปัญหาที่พบเห็นได้มากในนักเรียนทุกระดับชั้น ผู้วิจัยได้ทำการสำรวจข้อมูลจากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตที่มีการศึกษาอย่างมากมายของนักการศึกษา รวมไปถึงนักวิจัยที่สนใจศึกษาหัวข้อที่เกี่ยวข้องกับพีชคณิตในชั้นเรียน บทความนี้จึงเป็นการนำเสนอถึงข้อผิดพลาดทางความคิดหรือมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต โดยบทความนี้ได้จำแนกมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการเรียนรู้พีชคณิตออกเป็น 5 ประเภท ได้แก่ 1) ตัวแปร 2) นิพจน์พีชคณิต 3) สมการเชิงเส้น 4) พหุนาม นิพจน์ที่อยู่ในรูปเลขยกกำลัง และกรณฑ์ และ 5) ฟังก์ชันและกราฟ นักเรียนแสดงให้เห็นถึงการยึดติดกับแนวความคิดที่มีอยู่เดิมหรือมโนทัศน์ที่เคยเรียนรู้มาก่อนและความผิดพลาดในการแสดงให้เห็นถึงความเข้าใจที่ไม่ถูกต้อง ผลกระทบทางลบจากมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตส่งผลกระทบต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และความสำเร็จในการเรียนของนักเรียนทั้งในด้านพีชคณิตและวิชาที่เกี่ยวข้อง การเรียนพีชคณิตจึงเป็นเป้าหมายที่สำคัญของนักเรียนทุกคนในฐานะที่จะเป็นพลังที่สำคัญในการเรียนรู้ นักเรียนควรได้รับการปลูกฝังให้สนใจในการสร้างความเข้าใจ และเห็นความสำคัญไปจนถึงประโยชน์ของพีชคณิต ดังนั้นการสำรวจและแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเหล่านี้จึงเป็นสิ่งที่จำเป็นในกระบวนการจัดการเรียนรู้ของนักเรียนและการออกแบบการสอนของครูอย่างเร่งด่วน

อ้างอิง

- Barcellos, A. (2005). *Mathematical Misconceptions of College-Age Algebra Students*. (Doctor of Philosophy). University of California, USA.
- Booth, J. L., Barbieri, C., Eyer, F., & Blagoev, J. P. (2014). Persistent and Pernicious Misconceptions in Algebraic Problem Solving. *Journal of Problem solving*, 7(1), 10-23.
- Cai, Jinfa. (2004). Developing Algebraic Thinking in the Earlier Grades from an International Perspective. *The Mathematics Educator*, 8(1), 1-5.
- Cai, J., & Knuth, E. (2005). The Development of Students' Algebraic Thinking in earlier Grades from Curricular, Instructional, and Learning Perspectives. *International Review on Mathematics Education*, 24, 1-4.

- Cambell, A. (2009). *Remediation of First-Year Mathematics Students' Algebra Difficulties*. (Doctoral Dissertation). University of KwaZulu-Natal, South Africa.
- Cansiz, S., Kucuk, B. & Isleyen, T. (2011). Identifying the Secondary School Students' Misconceptions about Functions, *Procedia Social and Behavioral Sciences*, Turkey, 15, 3837-3842.
- Cathcart, W. G., Pothier, Y. M., Vance, J. H., & Bezuk, N. S. (2003). *Learning Mathematics in Elementary and Middle Schools*. (3rd ed.). Englewood Cliffs, N.J.: Merrill/Prentice Hall.
- Chaudhary, N. (2022). *Students' Errors in Learning Algebra at Basic Level*. (Master's Thesis). Tribhuvan University, Nepal.
- Chazan, D. & Yerushalmy, M. (2003). On Appreciating the Cognitive Complexity of School Algebra: Research on Algebra Learning and Directions of Curricular Change. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Shifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 123-135). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Christmas, T. P. & Fey, T. J. (1999). Communicating the Importance of Algebra to Students. In B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking Grades K-12: Reading from NCTM's School-Based Journals and Other Publications* (pp. 5-13). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B., & Perlwitz, M. (1991). Assesment of a Problem-Centered Second-Grade Mathematics Project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 3-29.
- Demby, A. (1997). Algebraic Procedures used by 13-to-15-Year-Olds. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 45-70.
- Egodawatte, G. (2011). *Secondary School Students Misconception in Algebra*. (Doctoral Dissertation). University of Toronto, Canada.

- Greenes, C., & Findell, C. (1999). Developing Students' Algebraic Reasoning Abilities. In L.V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 127-137). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Johnston, C. L., Willis, A. T., & Hughes, G. M. (1995). *Developmental Mathematics* (4th ed.). Boston: PWS Publishing.
- Lew, H. C. (2004). Developing Algebraic Thinking in Early Grades: Case Study of Korean Elementary School Mathematics. *The Mathematics Educator*, 8(1), 1-5.
- Li, X. (2006). *Cognitive Analysis of Students' Errors and Misconceptions in Variables, Equations, and Functions*. (Doctoral Thesis). Texas A&M University, USA.
- Liebenberg, R., Linchevski, L., Olivier, A., & Sasman, M. (1998). Laying the Foundation for Algebra: Developing an Understanding of Structure. *Paper presented at the 4th Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA)*, Pietersburg.
- Mulungye, M. M. (2016). *Sources of Students' Errors and Misconceptions in Algebra and Influence of Classroom Practice Remediation in Secondary Schools Machakos Sub-Country, Kenya*. (Master's Thesis). Kenyatta University, Kenya.
- Mulungye, M. M., O'Connor M., & Ndethiu S. (2016). Sources of Student Errors and Misconceptions in Algebra and Effectiveness of Classroom Practice Remediation in Machakos Country-Kenya. *Journal of Education and Practice*, 7(10), 31-33.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- Öçal, M. F. (2016). Asymptote Misconception on Graphing Functions: Does Graphing Software Resolve It? *Malaysian Online Journal of Educational Technology*, 5, 21-33.
- Ojose, B. (2015). Students' Misconceptions in Mathematics: Analysis of Remedies and What Research Says. *Ohio Journal of School Mathematics, Fall 2015*, Vol. 72.
- Osten, N. & Zakaria, N. (2018). Secondary School Students' Errors and Misconceptions in Learning Algebra. *Journal of Education and Learning (edulearn)*, 12(4), 690-701.

- Stacey, K. & MacGregor, M. (1997). Ideas about Symbolism that Students Bring to Algebra. *The Mathematics Teacher*. 90(2), 110-113.
- Titus, F. (2010). *A Cognitive Analysis of Developmental Mathematics Students' Errors and Misconceptions in Real Number Computations and Evaluating Algebraic Expressions*. (Doctoral Dissertation). University of Houston, Texas.
- Toka, Y., & Aşkar, P. (2002). The Effect of Cognitive Conflict and Conceptual Change Text on Students' Achievement Related to First Degree Equations with One Unknown. *Hacettepe Universitesi Egitim Fakultesi Dergisi-hacettepe University Journal of Education*, 23.
- Usiskin, Z. (1999). Doing Algebra in Grades K-4. In B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking Grades K-12: Reading from NCTM's School-Based Journals and Other Publications* (pp. 5-13). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.