พัฒนาการของสมบัติการหารลงตัวและการหารลงตัวอย่างแท้จริงด้วยกำลังของจำนวนในลำดับลูคาส์ชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง

Development of the Properties of Divisibility and Exact Divisibility by Powers of the Integers in the Lucas Sequences of the First and Second Kinds

กฤตขจร อ่อนแพง[1*]
Kritkhajohn Onphaeng[1*]

(Received: 2 August 2024; Revised: 31 October 2024; Accepted: 14 November 2024)

บทคัดย่อ

บทความนี้เป็นการรวบรวมและเรียบเรียงสมบัติการหารลงตัว สมบัติการหารลงตัวอย่างแท้จริงด้วยกำลังของจำนวนในลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) ลำดับลูคาส์ (Lucas sequence) และ ลำดับที่เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence relation) อื่น ๆ และ สมบัติอื่น ๆ ที่เกี่ยวกับการพัฒนาสมบัติการหารลงตัวและการหารลงตัวอย่างแท้จริงด้วยกำลังของจำนวนในลำดับลูคาส์ชนิดที่หนึ่ง (Lucas sequence of the first kind) และชนิดที่สอง (Lucas sequence of the second kind) ซึ่งสมบัตินี้มีผู้ที่ศึกษาและพัฒนาเป็นจำนวนมากและใช้ระยะเวลายาวนาน โดยสมบัตินี้เริ่มเป็นที่สนใจและได้รับการพัฒนาในปี ค.ศ. 1970 และเสร็จสมบูรณ์ในปี ค.ศ. 2021 รวมเป็นระยะเวลา 51 ปี

คำสำคัญ: การหารลงตัว การหารลงตัวอย่างแท้จริง ลำดับฟีโบนัชชี ลำดับลูคาส์ ความสัมพันธ์เวียนเกิด ลำดับลูคาส์ชนิดที่หนึ่ง ลำดับลูคาส์ชนิดที่สอง

[1]คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนราธิวาสราชนครินทร์
[1]Faculty of Science and technology, Princess of Naradhiwas University
[*]Corresponding Author, E-mail: kritkhajohn.o@pnu.ac.th

Abstract

This article provides a comprehensive compilation and organization the properties of divisibility and exact divisibility by powers of the integers in the Fibonacci sequence, Lucas sequence, and other recurrence relations. It also explores properties related to the development of divisibility properties and exact divisibility by powers of the integers in the Lucas sequences of the first and second kinds. By exploring the development of these properties from 1970 to 2021, it highlights the contributions of numerous researchers over this 51-year period and identifies avenues for future research.

Keywords: Divisibility, Exact divisibility, Fibonacci sequence, Lucas sequence, Recurrence relation, Lucas sequence of the first kind, Lucas sequence of the second kind

บทนำ

ลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) และลำดับลูคาส์ (Lucas sequence) เป็นลำดับของตัวเลขที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์และมักถูกศึกษาร่วมกันเนื่องจากมีโครงสร้างที่คล้ายคลึงกัน

ลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) เป็นลำดับตัวเลขที่เริ่มต้นจาก 0 และ 1 และตัวเลขถัดไปในลำดับจะเป็นผลรวมของสองตัวเลขก่อนหน้า ลำดับนี้มีลักษณะดังนี้:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,89, \ldots$$

และต่อไปเรื่อย ๆ เราสามารถเขียนลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) แทนด้วย $\{F_n\}_{n\geq 0}$ และนิยามลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) ด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$ $F_0 = 0$ และ $F_1 = 1$

ลำดับลูคาส์ (Lucas sequence) เป็นลำดับตัวเลขที่คล้ายกับลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) แต่เริ่มต้นด้วย 2 และ 1 แทนที่จะเป็น 0 และ 1 ลำดับลูคาส์ (Lucas sequence) เริ่มต้นดังนี้:

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47,76,123, \ldots$$

และต่อไปเรื่อย ๆ เราสามารถเขียนลำดับลูคาส์ (Lucas sequence) แทนด้วย $\{L_n\}_{n\geq 0}$ และนิยามลำดับลูคาส์ (Lucas sequence) ด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$ $L_0 = 2$ และ $L_1 = 1$

ทั้งสองลำดับสามารถใช้ในการศึกษาคุณสมบัติเฉพาะของตัวเลขและรูปแบบในคณิตศาสตร์ เช่น สัดส่วนทองคำ (Golden Ratio) ซึ่งเป็นค่าประมาณ 1.618 และเลขในธรรมชาติ เช่น รูปแบบของเปลือกหอย การจัดเรียงของใบไม้ หรือแม้แต่โครงสร้างของดอกไม้และเมล็ดพืช ทั้งสองลำดับไม่เพียงแต่มีความสวยงามและ

น่าสนใจ แต่ยังมีการประยุกต์ใช้ในหลากหลายสาขาวิชา เช่น การเข้ารหัสข้อมูล การวิเคราะห์ทางการเงิน และการออกแบบทางวิศวกรรม เป็นต้น

เนื่องจากได้มีการศึกษาสมบัติของทั้งสองลำดับมาอย่างยาวนานจึงทำให้มีสมบัติที่รู้จักกันโดยทั่วไปมากมายตัวอย่างเช่น

$$F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$$

$$F_{n+1} F_{n-1} - (F_n)^2 = (-1)^n$$

$$L_{-n} = (-1)^n L_n$$

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$$

$$5F_n = L_{n+1} + L_{n-1}$$

$$F_{2n} = F_n L_n$$

$$m|n \rightarrow F_m|F_n$$

$$F_m|F_n \text{ และ } m \neq 2 \rightarrow m|n$$

นอกจากลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) และลำดับลูคาส์ (Lucas sequence) ในบทความนี้เราจะกล่าวถึงลำดับลูคาส์ชนิดที่หนึ่ง (Lucas sequence of the first kind) และชนิดที่สอง (Lucas sequence of the second kind) เขียนแทนด้วย $\{U_n\}_{n\geq 0}$ และ $\{V_n\}_{n\geq 0}$ ตามลำดับ นิยามด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มจะได้ว่า $U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$ $U_0 = 0$ และ $U_1 = 1$ และ $V_n = aV_{n-1} + bV_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$ $V_0 = 2$ และ $V_1 = a$ สังเกตว่า ถ้า $a = b = 1$ แล้ว $\{U_n\}_{n\geq 0} = \{F_n\}_{n\geq 0}$ และ $\{V_n\}_{n\geq 0} = \{L_n\}_{n\geq 0}$ นั่นคือ ลำดับลูคาส์ชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง (Lucas sequences of the first and second kinds) เป็นรูปทั่วไปของลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) และลำดับลูคาส์ (Lucas sequence) ตามลำดับ นอกจากนี้แล้วเมื่อเราแทน $a = 2$ และ $b = 1$ จะได้ว่า $U_n = 2U_{n-1} + U_{n-2}$ ซึ่งเป็นนิยามเดียวกันกับลำดับเพล (Pell sequence) เขียนแทนด้วย $\{P_n\}_{n\geq 0}$ นั่นคือ $\{U_n\}_{n\geq 0} = \{P_n\}_{n\geq 0}$ เมื่อ $a = 2$ และ $b = 1$ ในทำนองเดียวกัน จำนวนบาลานซิ่งและจำนวนโคบาลานซิ่ง (Balancing and Cobalancing numbers) เขียนแทนด้วย $\{B_n\}_{n\geq 0}$ และ $\{C_n\}_{n\geq 0}$ ตามลำดับ เราได้ว่า $\{U_n\}_{n\geq 0} = \{B_n\}_{n\geq 0}$ และ $\{V_n\}_{n\geq 0} = \{C_n\}_{n\geq 0}$ เมื่อ $a = 6$ และ $b = -1$ ซึ่งลำดับเพล (Pell sequence) จำนวนบาลานซิ่งและจำนวนโคบาลานซิ่ง (Balancing and Cobalancing numbers) เราจะกล่าวถึงในลำดับถัดไป

ในบทความนี้เราจะเน้นไปที่สมบัติการหารและการหารลงตัวอย่างแท้จริงของ $\{F_n\}_{n\geq 0}$ $\{L_n\}_{n\geq 0}$ $\{U_n\}_{n\geq 0}$ และ $\{V_n\}_{n\geq 0}$ ซึ่งเราจะแบ่งการนำเสนอเป็นสามส่วน ส่วนแรกจะเป็นการรวบรวมและเรียบเรียง

พัฒนาการของสมบัติการหารลงตัวและสมบัติการหารลงตัวอย่างแท้จริงด้วยกำลังของจำนวนในลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) และลำดับลูคาส์ (Lucas sequence) ส่วนที่สองจะเป็นการรวบรวมและเรียบเรียงการขยายสมบัติการหารลงตัวและสมบัติการหารลงตัวอย่างแท้จริงของลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) และลำดับลูคาส์ (Lucas sequence) ไปสู่ลำดับที่ทั่วไปกว่านั่นคือ ลำดับลูคาส์ชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง (Lucas sequences of the first and second kinds) และส่วนสุดท้ายจะเป็นการกล่าวถึงแนวทางในการพัฒนาสมบัติอื่น ๆ หรือ สมบัติเดียวกันนี้กับลำดับอื่น ๆ

พัฒนาการของสมบัติการหารลงตัวและสมบัติการหารลงตัวอย่างแท้จริงของ $\{F_n\}_{n\geq 0}$ และ $\{L_n\}_{n\geq 0}$

ในส่วนนี้เราจะขอเริ่มที่นิยามของฟังก์ชันต่าง ๆ การหารลงตัวอย่างแท้จริง เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $m^k||n$ หมายถึง $m^k|n$ และ $m^{k+1}\nmid n$ หรือ m^k หาร n ลงตัว แต่ m^{k+1} หาร n ไม่ลงตัว สัญลักษณ์ $v_p(n)=k$ ถ้า $p^k||n$ ตัวอย่างเช่น ให้ $n=2^4\times 3^5\times 5^2\times 7$ จะได้ว่า $2^4||n$ $3^5||n$ $5^2||n$ $7||n$ $11^0||n$ $v_2(n)=4$ $v_3(n)=5$ $v_5(n)=2$ $v_7(n)=1$ และ $v_{11}(n)=0$

สมบัติการหารลงตัวของ F_n กลับมาเป็นที่น่าสนใจในปี ค.ศ. 1970 เนื่องมาจาก Matiyasevich (1970) ได้พิสูจน์

$$F_n^2|F_{mn}\leftrightarrow F_n|m \tag{1}$$

และใช้ (1) ในการแก้ปัญหาข้อที่ 10 ของ Hilbert ต่อมาในปี ค.ศ. 1977 Hoggatt and Bicknell-Johnson (1977) ได้ให้การพิสูจน์อีกแบบหนึ่งและขยายผลลัพธ์ (1) ของ (Matiyasevich, 1970) ได้ผลลัพธ์ดังนี้
ถ้า m เป็นจำนวนคี่ แล้ว

$$F_n^3|F_{mn}\leftrightarrow F_n^2|m$$

และได้ผลลัพธ์คล้าย ๆ กันในบางกรณีที่เลขชี้กำลังของ F_n ไม่เกิน 6 และยังได้แสดงอีกว่า ถ้า k,n,m เป็นจำนวนนับแล้ว

$$F_n^k|m\rightarrow F_n^{k+1}|F_{mn} \tag{2}$$

สังเกตว่าผลลัพธ์ (2) ของ Hoggatt and Bicknell-Johnson (1977) ยังไม่สมบูรณ์ ต่อมาในปี ค.ศ. 2012 Tangboonduangjit and Wiboonton (2012) ได้ศึกษา $\{G_k(n)\}_{k\geq 0}$ ซึ่งเป็นลำดับย่อยของ $\{F_n\}_{n\geq 0}$ นิยามดังนี้ $G_k(n)=F_{nG_{k-1}(n)}$ และ $G_1(n)=F_n$ ตัวอย่าง $G_k(n)$

$$F_n, F_{nF_n}, F_{nF_{nF_n}}, F_{nF_{nF_{nF_n}}}, \dots$$

และได้ผลลัพธ์ดังนี้ $F_n^k|G_k(n)$ สำหรับทุก $k\geq 1$ ในปีต่อมา Panraksa et al. (2013) ได้พิสูจน์ $F_n^k||G_k(n)$ สำหรับทุก $k\geq 1$ ต่อมาในปี ค.ศ. 2014 Onphaeng and Pongsriiam (2014) ได้ขยายนิยาม $G_k(n)$ และ

ผลลัพธ์ของ Panraksa et al. (2013) Tangboonduangjit and Wiboonton (2012) เป็น $G(1,n,m)=F_n^m$ และ $G(k+1,n,m)=F_{nG(k,n,m)}$ สังเกตว่า $G(k,n,1)=G_k(n)$ และได้ผลลัพธ์เป็น $F_n^{k+m-1}|G(k,n,m)$ สำหรับทุก k,n,m เป็นจำนวนนับ $F_n^{k+m-1}||G(k,n,m)$ สำหรับ $k\geq 2$ $n\geq 4$ และ $m\geq 1$ ในปีเดียวกัน Pongsriiam (2014) ขยายผลลัพธ์การหารลงตัวอย่างแท้จริงของ Panraksa et al. (2013) Tangboonduangjit and Wiboonton (2012) และ Onphaeng and Pongsriiam (2014) ไปกรณีที่ทั่วไปกว่า แสดงใน ทฤษฎีบทที่ 1 ขยายผลลัพธ์การหารและการหารลงตัวอย่างแท้จริงใน $\{L_n\}_{n\geq 0}$ แสดงใน ทฤษฎีบทที่ 2 และขยายผลลัพธ์การหารและการหารลงตัวอย่างแท้จริงใน $\{F_n\}_{n\geq 0}$ และ $\{L_n\}_{n\geq 0}$ แสดงใน ทฤษฎีบทที่ 3 ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 Pongsriiam (2014) สำหรับจำนวนนับ $n\geq 3$ จะได้ว่า

1.1 ถ้า $F_n^k||m$ และ $n\not\equiv 3(mod\ 6)$ แล้ว $F_n^{k+1}||F_{mn}$

1.2 ถ้า $F_n^k||m$ $n\equiv 3(mod\ 6)$ และ $\frac{F_n^{k+1}}{2}\nmid m$ แล้ว $F_n^{k+1}||F_{mn}$

1.3 ถ้า $F_n^k||m$ $n\equiv 3(mod\ 6)$ และ $\frac{F_n^{k+1}}{2}|m$ แล้ว $F_n^{k+2}||F_{mn}$

ทฤษฎีบทที่ 2 Pongsriiam (2014) ให้ m เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า

2.1 ถ้า $L_n^k|m$ แล้ว $L_n^{k+1}|L_{mn}$

2.2 ถ้า $L_n^k||m$ และ $n\geq 2$ แล้ว $L_n^{k+1}||L_{mn}$

ทฤษฎีบทที่ 3 Pongsriiam (2014) ให้ m เป็นจำนวนคู่และ $n\geq 2$ จะได้ว่า

3.1 ถ้า $L_n^k|m$ แล้ว $L_n^{k+1}|F_{mn}$

3.2 ถ้า $L_n^k||m$ และ $n\not\equiv 0(mod\ 3)$ แล้ว $L_n^{k+1}||F_{mn}$

3.3 ถ้า $L_n^k||m$ $n\equiv 0(mod\ 6)$ และ $\frac{L_n^{k+1}}{2}\nmid m$ แล้ว $L_n^{k+1}||F_{mn}$

3.4 ถ้า $L_n^k||m$ $n\equiv 0(mod\ 6)$ และ $\frac{L_n^{k+1}}{2}|m$ แล้ว $L_n^{k+2}||F_{mn}$

3.5 ถ้า $L_n^k||m$ $n\equiv 3(mod\ 6)$ และ $\frac{L_n^{k+1}}{4}\nmid m$ แล้ว $L_n^{k+1}||F_{mn}$

3.6 ถ้า $L_n^k||m$ $n\equiv 3(mod\ 6)$ และ $\frac{L_n^{k+1}}{4}|m$ แล้ว $L_n^{k+2}||4F_{mn}$

ต่อมาในปี ค.ศ. 2018 Onphaeng and Pongsriiam (2018) พิสูจน์บทกลับของ (2) ทฤษฎีบทที่ 1 ทฤษฎีบทที่ 2 และ ทฤษฎีบทที่ 3 ได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 4 Onphaeng and Pongsriiam (2018) ให้ k,n,m เป็นจำนวนนับและ $n\geq 3$ จะได้ว่า

4.1 ถ้า $F_n^{k+1}|F_{mn}$ และ $n\not\equiv 3(mod\ 6)$ แล้ว $F_n^k|m$

4.2 ถ้า $F_n^{k+1}|F_{mn}$ และ $n\equiv 3(mod\ 6)$ แล้ว $F_n^k|2m$ และ $F_n^{k-1}|m$

4.3 ถ้า $F_n^{k+1}|F_{mn}$ $n\equiv 3(mod\ 6)$ และ $2^k|m$ แล้ว $F_n^k|m$

สังเกตว่า ทฤษฎีบทที่ 4 เป็นบทกลับของ (2)

ทฤษฎีบทที่ 5 Onphaeng and Pongsriiam (2018) ให้ k,n,m เป็นจำนวนนับและ $n\geq 3$ จะได้ว่า

5.1 ถ้า $F_n^{k+1}||F_{mn}$ และ $n \not\equiv 3(mod\ 6)$ แล้ว $F_n^k||m$

5.2 ถ้า $F_n^{k+1}||F_{mn}$ $n \equiv 3(mod\ 6)$ และ $2^k|m$ แล้ว $F_n^k||m$

5.3 ถ้า $F_n^{k+1}||F_{mn}$ $n \equiv 3(mod\ 6)$ และ $2^k \nmid m$ แล้ว $F_n^{k-1}||m$

สังเกตว่า ทฤษฎีบทที่ 5 เป็นบทกลับของ ทฤษฎีบทที่ 1

ทฤษฎีบทที่ 6 Onphaeng and Pongsriiam (2018) ให้ k, n, m เป็นจำนวนนับและ $n \geq 2$ จะได้ว่า

6.1 ถ้า $L_n^{k+1}|L_{mn}$ แล้ว $n \not\equiv 0(mod\ 3)$ m เป็นจำนวนคี่ และ $L_n^k|m$

6.2 ถ้า $L_n^{k+1}||L_{mn}$ แล้ว $L_n^k||m$

สังเกตว่า ทฤษฎีบทที่ 6 เป็นบทกลับของ ทฤษฎีบทที่ 2

ทฤษฎีบทที่ 7 Onphaeng and Pongsriiam (2018) ให้ k, n, m เป็นจำนวนนับและ $n \geq 2$ ถ้า $L_n^{k+1}|F_{mn}$ แล้ว m เป็นจำนวนคู่ และจะได้ว่า

7.1 ถ้า $L_n^{k+1}|F_{mn}$ และ $n \not\equiv 0(mod\ 6)$ แล้ว $L_n^k|m$

7.2 ถ้า $L_n^{k+1}||F_{mn}$ และ $n \not\equiv 0(mod\ 6)$ แล้ว $L_n^k||m$

7.3 ถ้า $L_n^{k+1}|F_{mn}$ และ $n \equiv 0(mod\ 6)$ แล้ว $L_n^{min\{v_2(m),k\}}|m$

7.4 ถ้า $L_n^{k+1}||F_{mn}$ และ $n \equiv 0(mod\ 6)$ แล้ว $L_n^{min\{v_2(m),k\}}||m$

สังเกตว่า ทฤษฎีบทที่ 7 เป็นบทกลับของ ทฤษฎีบทที่ 3 เมื่อรวมผลลัพธ์ (2) ของ Hoggatt and Bicknell-Johnson (1977) ทฤษฎีบทที่ 1-3 ของ Pongsriiam (2014) และ ทฤษฎีบทที่ 4-7 ของ Onphaeng and Pongsriiam (2018) เราจะได้ว่า ปัญหาสมบัติการหารลงตัวและการหารลงตัวอย่างแท้จริงด้วยกำลังของจำนวนในลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) และลำดับลูคาส์ (Lucas sequence) ที่กลับมาเป็นที่น่าสนใจในปี ค.ศ. 1970 เริ่มโดย Matiyasevich นั้นครบถ้วนสมบูรณ์แล้วในปี ค.ศ. 2018

สมบัติการหารลงตัวและสมบัติการหารลงตัวอย่างแท้จริงของ $\{U_n\}_{n\geq 0}$ และ $\{V_n\}_{n\geq 0}$

ในส่วนนี้เราจะขอเริ่มที่นิยามของฟังก์ชันเพิ่มเติม ลำดับการปรากฏของ m ใน $\{U_n\}_{n\geq 0}$ เขียนแทนด้วย $\tau(m)$ เป็นจำนวนเต็มบวก k ที่เล็กที่สุดที่ $m|U_k$ ตัวอย่างเช่น เมื่อ $a = b = 1$ แล้ว $\{U_n\}_{n\geq 0} = \{F_n\}_{n\geq 0}$ $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$ จะได้ว่า $\tau(2) = 3$ $\tau(3) = 4$ $\tau(4) = 6$ และ $\tau(5) = 5$

ในปี ค.ศ. 2018 Panraksa and Tangboonduangjit (2018) ได้ศึกษา $\{G_k(n)\}_{k\geq 0}$ ซึ่งเป็นลำดับย่อยของ $\{U_n\}_{n\geq 0}$ นิยามดังนี้ $G_k(n) = U_{nG_{k-1}(n)}$ สำหรับ $k \geq 2$ และ $G_1(n) = U_n$ ตัวอย่างลำดับ $G_k(n)$

$$G_n, G_{nG_n}, G_{nG_{nG_n}}, G_{nG_{nG_{nG_n}}}, \ldots$$

ในปี ค.ศ. 2020 Patra et al. (2021) ศึกษาสมบัติการหารลงตัวและการหารลงตัวอย่างแท้จริงของจำนวนบาลานซิ่งและจำนวนโคบาลานซิ่ง (Balancing and Cobalancing numbers) ได้ผลลัพธ์ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 8 Patra et al. (2021) ให้ k, n, m เป็นจำนวนนับและ $n, m \geq 2$ จะได้ว่า

$$B_n^k||m \leftrightarrow B_n^{k+1}||B_{mn}$$

ทฤษฎีบทที่ 9 Patra et al. (2021) ให้ k, n, m เป็นจำนวนนับและ m เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า

$$C_n^k||m \leftrightarrow C_n^{k+1}||C_{mn}$$

ทฤษฎีบทที่ 10 Patra et al. (2021) ให้ k, n, m เป็นจำนวนนับและ m เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า

$$C_n^k||m \leftrightarrow C_n^{k+1}||B_{mn}$$

สังเกตว่า ทฤษฎีบทที่ 1 ทฤษฎีบทที่ 5 และ ทฤษฎีบทที่ 8 เป็นสมบัติการหารลงตัวอย่างแท้จริงของ $\{F_n\}_{n\geq 0}$ และ $\{B_n\}_{n\geq 0}$ ซึ่งทั้งสองเป็นลำดับลูคาส์ชนิดที่หนึ่ง (Lucas sequence of the first kind) ในกรณีที่ $a = b = 1$ และ $a = 6$ $b = -1$ ตามลำดับ ทฤษฎีบทที่ 2 ทฤษฎีบทที่ 6 และ ทฤษฎีบทที่ 9 เป็นสมบัติการหารลงตัวอย่างแท้จริงของ $\{L_n\}_{n\geq 0}$ และ $\{C_n\}_{n\geq 0}$ ซึ่งทั้งสองเป็นลำดับลูคาส์ชนิดที่สอง (Lucas sequence of the second kind) ในกรณีที่ $a = b = 1$ และ $a = 6$ $b = -1$ ตามลำดับ ทฤษฎีบทที่ 3 ทฤษฎีบทที่ 7 และ ทฤษฎีบทที่ 10 เป็นสมบัติการหารลงตัวอย่างแท้จริงของ $\{F_n\}_{n\geq 0}$ $\{B_n\}_{n\geq 0}$ $\{L_n\}_{n\geq 0}$ และ $\{C_n\}_{n\geq 0}$ ดังนั้น ลำดับที่ทั่วไปกว่าอย่างลำดับลูคาส์ชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง (Lucas sequences of the first and second kinds) จะมีสมบัติการหารลงตัวและการหารลงตัวอย่างแท้จริงหรือไม่ และคำตอบของคำถามนี้เกิดขึ้นในปีเดียวกันและปีถัดมาเมื่อ Onphaeng and Pongsriiam (2020,2021) ศึกษาสมบัติการหารลงตัวและการหารลงตัวอย่างแท้จริงของลำดับลูคาส์ชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง (Lucas sequences of the first and second kinds) ได้ผลลัพธ์ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 11 Onphaeng and Pongsriiam (2020) ให้ k, n, m เป็นจำนวนนับ จะได้ว่า

$$U_n^k|m \rightarrow U_n^{k+1}|U_{mn}$$

ทฤษฎีบทที่ 12 Onphaeng and Pongsriiam (2020) ให้ k, n, m เป็นจำนวนนับ a, b เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $(a, b) = 1$ $n \geq 2$ และ $U_n^k||m$ จะได้ว่า

12.1 ถ้า a เป็นจำนวนคี่ b เป็นจำนวนคู่ แล้ว $U_n^{k+1}||U_{mn}$

12.2 ถ้า a เป็นจำนวนคู่ b เป็นจำนวนคี่ แล้ว $U_n^{k+1}||U_{mn}$

12.3 ถ้า a และ b เป็นจำนวนคี่ และ $n \not\equiv 3(mod\ 6)$ แล้ว $U_n^{k+1}||U_{mn}$

12.4 ถ้า a และ b เป็นจำนวนคี่ $n \equiv 3(mod\ 6)$ และ $\frac{U_n^{k+1}}{2} \nmid m$ แล้ว $U_n^{k+1}||U_{mn}$

12.5 ถ้า a และ b เป็นจำนวนคี่ $n \equiv 3(mod\ 6)$ $\frac{U_n^{k+1}}{2}|m$ และ $2||a^2 + 3b$ แล้ว $U_n^{k+1}||U_{mn}$

12.6 ถ้า a และ b เป็นจำนวนคี่ $n \equiv 3(mod\ 6)$ $\frac{U_n^{k+1}}{2}|m$ และ $4|a^2 + 3b$ แล้ว $U_n^{k+t+1}||U_{mn}$

เมื่อ $t = min\left(\{v_2(U_6) - 2\} \cup \{y_p - k \middle| p \text{ เป็นจำนวนเฉพาะคี่ที่หาร } U_n \text{ ลงตัว}\}\right)$ และ $y_p = \left\lfloor \frac{v_p(m)}{v_p(U_n)} \right\rfloor$ สำหรับทุกจำนวนเฉพาะคี่ p ที่หาร U_n ลงตัว

ทฤษฎีบทที่ 13 Onphaeng and Pongsriiam (2020) ให้ k, n, m เป็นจำนวนนับ a, b เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $(a, b) = 1$ $n \geq 2$ และ $U_n^{k+1}||U_{mn}$ จะได้ว่า

13.1 ถ้า a เป็นจำนวนคี่ b เป็นจำนวนคู่ แล้ว $U_n^k||m$

13.2 ถ้า a เป็นจำนวนคู่ b เป็นจำนวนคี่ แล้ว $U_n^k||m$

13.3 ถ้า a และ b เป็นจำนวนคี่ และ $n \not\equiv 3(mod\ 6)$ แล้ว $U_n^k||m$

13.4 ถ้า a และ b เป็นจำนวนคี่ $n \equiv 3(mod\ 6)$ และ $2||a^2+3b$ แล้ว $U_n^k||m$

13.5 ถ้า a และ b เป็นจำนวนคี่ $n \equiv 3(mod\ 6)$ $4|a^2+3b$ และ $v_2(m) \geq k$ แล้ว $U_n^k||m$

13.6 ถ้า a และ b เป็นจำนวนคี่ $n \equiv 3(mod\ 6)$ $4|a^2+3b$ และ $v_2(m) < k$ แล้ว m เป็นจำนวนคู่ $v_2(m) \geq k+1-v_2(a^2+3b)$ และ $U_n^{v_2(m)}||m$

ทฤษฎีบทที่ 14 Onphaeng and Pongsriiam (2021) ให้ k,n,m เป็นจำนวนนับ a,b เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $(a,b)=1$ และ m เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า

14.1 ถ้า $V_n^k|m$ แล้ว $V_n^{k+1}|V_{mn}$

14.2 ถ้า $V_n^k||m$ แล้ว $V_n^{k+1}||V_{mn}$

14.3 ถ้า $V_n^k|V_{mn}$ แล้ว $V_n^{k-1}|m$

14.4 ถ้า $V_n^k||V_{mn}$ แล้ว $V_n^{k-1}||m$

ทฤษฎีบทที่ 15 Onphaeng and Pongsriiam (2021) ให้ k,n,m เป็นจำนวนนับ a,b เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $(a,b)=1$ a เป็นจำนวนคี่ b เป็นจำนวนคู่ และ m เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า

15.1 ถ้า $V_n^k|m$ แล้ว $V_n^{k+1}|U_{mn}$

15.2 ถ้า $V_n^k||m$ แล้ว $V_n^{k+1}||U_{mn}$

15.3 ถ้า $V_n^{k+1}|U_{mn}$ แล้ว $V_n^k|m$

15.4 ถ้า $V_n^{k+1}||U_{mn}$ แล้ว $V_n^k||m$

ทฤษฎีบทที่ 16 Onphaeng and Pongsriiam (2021) ให้ k,n,m เป็นจำนวนนับ a,b เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $(a,b)=1$ a เป็นจำนวนคู่ b เป็นจำนวนคี่ m เป็นจำนวนคู่ $y_p = \left\lfloor \frac{v_p(m)}{v_p(V_n)} \right\rfloor$ สำหรับทุกจำนวนเฉพาะคี่ p ที่หาร V_n และ $t = min(\{v_2(n)+v_2(a)-2\} \cup \{y_p - k | p$ เป็นจำนวนเฉพาะคี่ที่หาร V_n ลงตัว$\})$ ลงตัวจะได้ว่า

16.1 ถ้า $V_n^k|m$ และ $2|n$ แล้ว $V_n^{k+1}|U_{mn}$

16.2 ถ้า $V_n^k|m$ และ $2 \nmid n$ แล้ว $\frac{V_n^{k+1}}{2}|U_{mn}$

16.3 ถ้า $V_n^k|m$ $2 \nmid n$ และ $v_2(m) \geq v_2(V_n^k)+1$ แล้ว $V_n^{k+1}|U_{mn}$

16.4 ถ้า $V_n^k|m$ $2|n$ และ $\frac{V_n^{k+1}}{2}|m$ แล้ว $t \geq 0$ $v_2(m) \geq k$ และ $V_n^{k+t+1}|U_{mn}$

16.5 ถ้า $V_n^k||m$ $2|n$ และ $\frac{V_n^{k+1}}{2} \nmid m$ แล้ว $V_n^{k+1}||U_{mn}$

16.6 ถ้า $V_n^k||m$ $2|n$ และ $\frac{V_n^{k+1}}{2}|m$ แล้ว $V_n^{k+t+1}||U_{mn}$

16.7 ถ้า $V_n^k||m$ $2 \nmid n$ และ $v_2(m) = v_2(V_n^k)$ แล้ว $V_n^k||U_{mn}$

16.8 ถ้า $V_n^k||m$ $2 \nmid n$ และ $v_2(m) \geq v_2(V_n^k)$ แล้ว $V_n^{k+1}||U_{mn}$

ทฤษฎีบทที่ 17 Onphaeng and Pongsriiam (2021) ให้ k, n, m เป็นจำนวนนับ a, b เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $(a, b) = 1$ a เป็นจำนวนคู่ b เป็นจำนวนคี่ และ m เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า

17.1 สำหรับทุกจำนวนเฉพาะคี่ p ถ้า $v_p(V_n^{k+1}) \leq v_p(U_{mn})$ แล้ว $v_p(V_n^k) \leq v_p(m)$

17.2 ถ้า $V_n^{k+1}|U_{mn}$ และ $2|n$ แล้ว $V_n^{min(k,v_2(m))}|m$

17.3 ถ้า $V_n^{k+1}||U_{mn}$ และ $2|n$ แล้ว $V_n^{min(k,v_2(m))}||m$

17.4 ถ้า $V_n^{k+1}|U_{mn}$ และ $2 \nmid n$ แล้ว $V_n^k|m$

17.5 ถ้า $V_n^{k+1}||U_{mn}$ $2 \nmid n$ และ $\frac{V_n^{k+2}}{2} \nmid U_{mn}$ แล้ว $V_n^k||m$

17.6 ถ้า $V_n^{k+1}||U_{mn}$ $2 \nmid n$ และ $\frac{V_n^{k+2}}{2}|U_{mn}$ แล้ว $V_n^{k+1}||m$

ทฤษฎีบทที่ 18 Onphaeng and Pongsriiam (2021) ให้ k, n, m เป็นจำนวนนับ a, b เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $(a, b) = 1$ a และ b เป็นจำนวนคี่ m เป็นจำนวนคู่ $y_p = \left\lfloor \frac{v_p(m)}{v_p(V_n)} \right\rfloor$ สำหรับทุกจำนวนเฉพาะคี่ p ที่หาร V_n ลงตัว $c = v_2(U_6) - 1$

$$t = min\left(\{v_2(n) + c - 1\} \cup \{y_p - k | p \text{ เป็นจำนวนเฉพาะคี่ที่หาร } V_n \text{ ลงตัว}\}\right)$$

และ $s = \min(\{c - 1\} \cup \{y_p - k | p \text{ เป็นจำนวนเฉพาะคี่ที่หาร } V_n \text{ ลงตัว}\})$ จะได้ว่า

18.1 ถ้า $V_n^k|m$ แล้ว $V_n^{k+1}|U_{mn}$

18.2 ถ้า $V_n^k||m$ และ $n \not\equiv 0(mod3)$ แล้ว $V_n^{k+1}||U_{mn}$

18.3 ถ้า $V_n^k||m$ $n \equiv 0(mod6)$ และ $\frac{V_n^{k+1}}{2} \nmid m$ แล้ว $V_n^{k+1}||U_{mn}$

18.4 ถ้า $V_n^k|m$ $n \equiv 0(mod6)$และ $\frac{V_n^{k+1}}{2}|m$ แล้ว $t \geq 0$ และ $V_n^{k+t+1}|U_{mn}$

18.5 ถ้า $V_n^k||m$ $n \equiv 0(mod6)$ และ $\frac{V_n^{k+1}}{2}|m$ แล้ว $V_n^{k+t+1}||U_{mn}$

18.6 ถ้า $V_n^k||m$ $n \equiv 3(mod6)$ $2||a^2 + 3b$ และ $\frac{V_n^{k+1}}{2} \nmid m$ แล้ว $V_n^{k+1}||U_{mn}$

18.7 ถ้า $V_n^k|m$ $n \equiv 3(mod6)$ $2||a^2 + 3b$ และ $\frac{V_n^{k+1}}{2}|m$ แล้ว $s \geq 0$ และ $V_n^{k+s+1}|U_{mn}$

18.8 ถ้า $V_n^k||m$ $n \equiv 3(mod6)$ $2||a^2 + 3b$ และ $\frac{V_n^{k+1}}{2}|m$ แล้ว $V_n^{k+s+1}||U_{mn}$

18.9 ถ้า $V_n^k||m$ $n \equiv 3(mod6)$ $4|a^2 + 3b$ และ $\frac{V_n^{k+1}}{2^c} \nmid m$ แล้ว $V_n^{k+1}||U_{mn}$

18.10 ถ้า $V_n^k|m$ $n \equiv 3(mod6)$ $4|a^2 + 3b$ และ $\frac{V_n^{k+1}}{2^c}|m$ แล้ว $V_n^{k+2}|2^c U_{mn}$

18.11 ถ้า $V_n^k||m$ $n \equiv 3(mod6)$ $4|a^2 + 3b$ และ $\frac{V_n^{k+1}}{2^c}|m$ แล้ว $V_n^{k+2}||2^c U_{mn}$

ทฤษฎีบทที่ 19 Onphaeng and Pongsriiam (2021) ให้ k, n, m เป็นจำนวนนับ a, b เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $(a, b) = 1$ a และ b เป็นจำนวนคี่ และ m เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า

19.1 สำหรับทุกจำนวนเฉพาะคี่ p ที่หาร V_n ลงตัว ถ้า $v_p(V_n^{k+1}) \leq v_p(U_{mn})$ แล้ว $v_p(V_n^k) \leq v_p(m)$

19.2 ถ้า $V_n^{k+1}|U_{mn}$ และ $n \not\equiv 0(mod3)$ แล้ว $V_n^k|m$

19.3 ถ้า $V_n^{k+1}||U_{mn}$ และ $n \not\equiv 0(mod3)$ แล้ว $V_n^k||m$

19.4 ถ้า $V_n^{k+1}|U_{mn}\ n \equiv 0(mod6)$ และ $v_2(m) \geq k$ แล้ว $V_n^k|m$

19.5 ถ้า $V_n^{k+1}||U_{mn}\ n \equiv 0(mod6)$ และ $v_2(m) \geq k$ แล้ว $V_n^k||m$

19.6 ถ้า $V_n^{k+1}|U_{mn}\ n \equiv 0(mod6)$ และ $v_2(m) < k$ แล้ว $V_n^{v_2(m)}||m$

19.7 ถ้า $V_n^{k+1}|U_{mn}\ n \equiv 3(mod6)\ 2||a^2+3b$ และ $v_2(m) \geq k$ แล้ว $V_n^k|m$

19.8 ถ้า $V_n^{k+1}||U_{mn}\ n \equiv 3(mod6)\ 2||a^2+3b$ และ $v_2(m) \geq k$ แล้ว $V_n^k||m$

19.9 ถ้า $V_n^{k+1}|U_{mn}\ n \equiv 3(mod6)\ 2||a^2+3b$ และ $v_2(m) < k$ แล้ว $V_n^{v_2(m)}||m$

19.10 ถ้า $V_n^{k+1}|U_{mn}\ n \equiv 3(mod6)$ และ $4|a^2+3b$ แล้ว $V_n^k|m$

19.11 ถ้า $V_n^{k+1}||U_{mn}\ n \equiv 3(mod6)$ และ $4|a^2+3b$ แล้ว $V_n^k||m$

เมื่อรวมผลลัพธ์ ทฤษฎีบทที่ 10-19 ของ Onphaeng and Pongsriiam (2020,2021) เราจะได้ว่า ปัญหาสมบัติการหารลงตัวและการหารลงตัวอย่างแท้จริงด้วยกำลังของจำนวนในลำดับลูคาส์ชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง (Lucas sequences of the first and second kinds) ที่เริ่มโดย Matiyasevich ในปี ค.ศ. 1970 นั้นครบถ้วนสมบูรณ์แล้วในปี ค.ศ. 2021 รวมเวลาทั้งสิ้น 51 ปี

แนวทางในการพัฒนาสมบัติอื่น ๆ

สำหรับแนวทางในการขยายปัญหานี้ ผู้จัดทำขอเสนอสองแนวทาง แนวทางแรกศึกษาเศษเหลือจากการหาร ซึ่งจะมีตัวอย่างเป็นผลลัพธ์ใน Onphaeng and Pongsriiam (2014) Panraksa et al. (2013) Patra et al. (2022) แนวทางที่สองศึกษาสมบัติเดียวกันนี้กับลำดับอื่น ๆ

บทสรุป

หลายครั้งที่ปัญหาทางคณิตศาสตร์เริ่มต้นแก้จากจุดเล็ก ๆ และขยายไปเรื่อย ๆ จนครบถ้วนสมบูรณ์ ปัญหาสมบัติการหารลงตัวและการหารลงตัวอย่างแท้จริงก็เช่นเดียวกันถึงแม้จะใช้เวลาทั้งสิ้น 51 ปี ก็ตามแต่เมื่อเราสังเกตดูแล้วจะเห็นว่า การพัฒนาสมบัติการหารลงตัวและการหารลงตัวอย่างแท้จริงในช่วงแรกจะค่อนข้างช้าใช้เวลาถึง 48 ปี ปัญหาสมบัติการหารลงตัวและการหารลงตัวอย่างแท้จริงด้วยกำลังของจำนวนในลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) และลำดับลูคาส์ (Lucas sequence) จึงจะครบถ้วนสมบูรณ์ แต่เมื่อขยายปัญหาไปลำดับลูคาส์ชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง (Lucas sequences of the first and second kinds) ซึ่งเป็นลำดับที่ทั่วไปกว่าและมีกรณีแยกย่อยกว่ามาก แต่กลับใช้เวลาเพียง 3 ปี ในการแก้ปัญหานี้ ส่วนหนึ่งอาจจะมาจากการที่เรามีเครื่องมือในการแก้ปัญหาที่ดีขึ้นและเรามีแนวทางในการแก้ปัญหาที่ดีที่ได้มาจากความสำเร็จในการแก้ปัญหาครั้งก่อนหน้า

อ้างอิง

Hoggatt, V. E., and Bicknell-Johnson, M. (1977). Divisibility by Fibonacci and Lucas squares. *The Fibonacci Quarterly*, 15(1), 3 – 8.

Matiyasevich, Y. (1970). Enumerable Sets are Diophantine. *Proc. of the Academy of Sciences of the USSR*, 11(2), 354 – 358.

Onphaeng, K., and Pongsriiam, P. (2020). Exact divisibility by powers of the integers in the Lucas sequence of the first kind. *AIMS Mathematics*, 5(6), 6739 – 6748.

Onphaeng, K., and Pongsriiam, P. (2021). Exact divisibility by powers of the integers in the Lucas sequences of the first and second kinds. *AIMS Mathematics*, 6(11), 11733 – 11748.

Onphaeng, K., and Pongsriiam, P. (2014). Subsequences and divisibility by powers of the Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 52(2), 163 – 171.

Onphaeng, K., and Pongsriiam, P. (2018). The converse of exact divisibility by powers of the Fibonacci and Lucas numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 56(4), 296 – 302.

Panraksa, C., and Tangboonduangjit, A. (2018). p-adic valuation of Lucas iteration sequences. *The Fibonacci Quarterly*, 56(4), 348 – 353.

Panraksa, C., Tangboonduangjit, A. and Wiboonton, K. (2013). Exact divisibility properties of some subsequence of Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 51(4), 307 – 318.

Patra, A., Panda, G. K., and Khemaratchatakumthorn, T. (2021). Exact divisibility by powers of the balancing and Lucas-balancing numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 59(1), 57 – 64.

Patra, A., Panda, G. K., Onphaeng, K., Phunphayap, P. and Khemaratchatakumthorn, T. (2022). Subsequences and exact divisibility by the powers of the balancing numbers. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 17(2), 611 – 617.

Pongsriiam, P. (2014). Exact divisibility by powers of the Fibonacci and Lucas numbers. *Journal Integer Sequences*, 17, Article 14.11.2. https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL17 /Pongsriiam/pong6.pdf

Tangboonduangjit, A. and Wiboonton, K. (2012). Divisibility properties of some subsequence of Fibonacci numbers. *East-West Journal Mathematics*, Special Volume, 331 – 336.